

采用 Galerkin 离散方法的 T-小波边界元法

王焘, 校金友, 曹衍闯, 张铎
(西北工业大学航天学院, 710072, 西安)

摘要: 提出一种采用 Galerkin 离散方法的 T-小波边界元新方法. 通过边界元形函数的正交变换构造 T-小波, 以 T-小波为试函数和测试函数, 采用 Galerkin 方法离散积分方程, 对所形成的系数矩阵进行压缩, 有效地降低了边界元分析的计算和存储量. 此外, 还提出一种系数矩阵快速计算方法, 通过泰勒多项式的矩量矩阵变换得到关于泰勒多项式法向导数的矩量矩阵. 此新方法的特点是只需构造 1 组 T-小波作为基函数, 克服了现有 T-小波边界元法采用 Petrov-Galerkin 方法离散边界积分方程需分别构造试函数和测试函数、用于小波构造的计算和存储量大的问题. 通过对 2 个中、大规模电容提取问题的算例进行求解, 结果表明: 此新方法在保持精度不变的情况下, 可将用于 T-小波构造的计算时间和内存占用量分别降低约一半.

关键词: 边界元法; T-小波; Galerkin 法; 矩阵压缩

中图分类号: TB115 **文献标志码:** A **文章编号:** 0253-987X(2010)12-0099-06

Fast T-Wavelet Boundary Element Method Using Galerkin Discretization Scheme

WANG Tao, XIAO Jinyou, CAO Yanchuang, ZHANG Duo

(College of Astronautics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

Abstract: A new T-wavelet boundary element method (BEM) in which the boundary integral equations are discretized by Galerkin scheme is proposed. The T-wavelets are transformed from the nodal basis functions and then are used to compress the BEM matrices. Moreover, a fast matrix computation method is presented, where the moment matrices with respect to the normal derivatives of the Taylor polynomials are obtained by a multilevel transformation from the moment matrices with respect to the Taylor polynomials. The proposed method adopts only one T-wavelet basis to reduce the computational complexity. The existing matrix compression methods can be employed in the proposed method. Two representative capacitance extraction examples show that the computational time and memory requirements for wavelet construction can be reduced by half of the original method without obvious reduction of the accuracy.

Keywords: boundary element method; T-wavelet; Galerkin scheme; matrix compression

边界元方法(BEM)是一种重要的工程数值方法,在计算力学、电磁学、声学、传热学等领域有着广泛的应用.传统的BEM会形成稠密的系数矩阵,求解复杂度至少为 $O(N^2)$ (N 为未知量数目),因而无法用于求解工程中的大规模复杂问题.近二十多年来,快速BEM成为国际上研究的热点.目前的快速

BEM主要有多极方法^[1]、H-矩阵方法和小波BEM^[2-3],它们的求解复杂度均为 $O(N \lg N^a)$, $a \geq 0$.

本文研究基于T-小波的快速BEM. T-小波由Tausch在1998年首先提出^[4].它克服了常规小波需要边界参数化的限制,能在任意边界元网格上构造,因此在保持常规小波BEM求解效率的同时,极

大地提高了小波 BEM 的通用性^[5-7]. 最近, 作者所在的研究组提出了准消失矩 T-小波的概念^[8]和一种高效的矩阵后压缩方法^[9], 进一步降低了 T-小波 BEM 的计算时间和内存消耗, 使其对许多问题的求解效率明显高于其他快速 BEM.

但是, 现有的 T-小波 BEM 均采用 Petrov-Galerkin 方法离散积分方程, 因此需要同时构造多组 T-小波分别作为试函数和测试函数. 例如, 在求解 Laplace 方程对应的双层势边界积分方程时要构造 2 组 T-小波, 而在求解 Stokes 流动问题和弹性力学的双层势边界积分方程时则要构造 5 组 T-小波, 并且每一组小波对应的系数矩阵要分别存储, 因此小波构造的时间和内存消耗将成为主要的计算负担. 为解决此问题, 本文采用 Galerkin 法离散积分方程, 提出一种新的 T-小波 BEM. 此方法与原方法的主要区别是它只需要构造 1 组 T-小波, 因此会降低小波构造的时间和内存消耗, 从而为 T-小波 BEM 在 Stokes 流动和弹性力学等问题中的应用奠定基础.

1 T-小波边界元法

1.1 基本思路

为方便讨论, 本文考虑三维空间 Laplace 方程对应的双层势边界积分方程

$$Ku(\mathbf{x}) \equiv \frac{1}{2}u(\mathbf{x}) + \int_{\Gamma} \kappa(\mathbf{x}, \mathbf{y})u(\mathbf{y})d\mathbf{y} = f(\mathbf{x}) \quad (1)$$

式中: K 为二重势积分算子; $u(\mathbf{x})$ 为未知函数; $f(\mathbf{x})$ 为已知函数; Γ 为求解区域的边界. 设 $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ 为点 $\mathbf{x} \in \Gamma$ 处的外法向量, 则核函数为

$$\kappa(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{y})} \frac{1}{4\pi r} = -\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{y})\mathbf{n}(\mathbf{y})}{4\pi r^3}, r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$$

本文考虑边界 Γ 的一组三角形单元剖分 $\{\tau_i\}_{i=1}^N$, 选取常单元, 设其结点(形函数)基 $\mathbf{S} = \{\chi_i\}_{i=1}^N$, 其中 χ_i 为第 i 个单元上的特征函数. 常规 BEM 直接用 $\mathbf{S}$ 离散积分方程, 得到的线性方程组的系数矩阵为非对称满阵, 因此求解的存储量和迭代求解的计算量均为 $O(N^2)$.

T-小波 BEM 的基本思路是, 首先对结点基 $\mathbf{S}$ 做等价变换, 得到一组新函数 Ψ , 称为 T-小波基, 这个过程可以表示为

$$\Psi = \mathbf{S}\mathbf{Q} \quad (2)$$

式中: $\mathbf{Q}$ 为 $N \times N$ 的正交小波变换矩阵. T-小波基 Ψ 和结点基 $\mathbf{S}$ 的重要区别是, Ψ 中的大量函数(T-

小波)具有对某类函数的消失矩特性. 例如, 小波 $\psi(\mathbf{x})$ 对多项式 $(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^\alpha$ ($\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 为多重指标)具有 p 阶消失矩是指

$$\int_{\Gamma} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^\alpha \psi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0, \quad |\alpha| \leq p$$

因此, 用 Ψ 离散方程(1)形成的系数矩阵中大量元素的绝对值很小, 可以设为 0 而不必计算(即矩阵压缩), 从而达到降低求解复杂度的目的^[2-9].

1.2 Galerkin 离散方法

现有 T-小波 BEM 求解方程(1)的理论基础是, 当点 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{y}$ 相距较远时, 核函数 $\kappa(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 可以泰勒展开成^[5,8-9]

$$\kappa(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{\alpha, \beta} \frac{\partial_x^\alpha \partial_y^\beta \kappa(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)}{\alpha! \beta!} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^\alpha \frac{\partial(\mathbf{y}_0 - \mathbf{y})^\beta}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{y})} \quad (3)$$

式中: $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| + |\mathbf{y} - \mathbf{y}_0| < |\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0|$. 因此, 如果构造 2 组小波基 Ψ 和 Ψ' , 分别对多项式 $(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^\alpha$ 及其法向导数 $\partial(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^\alpha / \partial \mathbf{n}(\mathbf{x})$ 具有 p 阶消失矩, 则用 Ψ 和 Ψ' 作为试函数和测试函数, 采用 Petrov-Galerkin 方法离散方程(1), 可得到数值稀疏的系数矩阵.

但是, 上述采用 Petrov-Galerkin 法的 T-小波 BEM 如果应用于 Stokes(或弹性力学)问题的二重势积分方程, 将会大大增加计算时间和内存需求. 因为 Stokes 二重势积分方程的核函数为

$$T_{ij} = -\frac{3}{4\pi} \frac{r_i r_j r_k n_k}{r^5}$$

应用 Petrov-Galerkin 法时, 需对 T_{ij} 进行分解

$$T_{ij} =$$

$$\frac{1}{4\pi} \left[-\frac{\partial G(r)}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{y})} \delta_{ij} + n_j \frac{\partial G(r)}{\partial r_i} + n_i \frac{\partial G(r)}{\partial r_j} + \frac{\partial F(r)}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{y})} \right] \quad (4)$$

式中

$$G(r) = \frac{1}{r}; F(r) = \frac{\partial^2 r}{\partial r_i \partial r_j}$$

显然, 如果按照式(3)的思路离散式(4), 需要分别构造对 $(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^\alpha$ 、 $\partial(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^\alpha / \partial \mathbf{n}(\mathbf{x})$ 和 $n_i(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^\alpha$ ($i = 1, 2, 3$) 具有消失矩的 5 组 T-小波, 这样用于小波构造的时间将大大增加. 另外, 针对式(4)中 4 个分解项的压缩矩阵需要分开存储, 内存需求将是方程(1)的 36 倍.

为降低 T-小波 BEM 求解 Stokes 或弹性力学问题的计算量和存储量, 本文提出采用 Galerkin 离

散方法的 T-小波 BEM. 它只要构造 1 组关于 $(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)^\alpha$ 具有消失矩的 T-小波,同时,由于式(4)中 4 个分解项是在同一组小波基下压缩的,得到的 4 个系数矩阵可以合并成 1 个矩阵,从而大大降低了内存需求.

要说明的是,关于 $(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)^\alpha$ 具有消失矩的 T-小波可用于式(4)中 4 个分解项的矩阵压缩,亦即它仍具有对 $\partial(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)^\alpha/\partial\mathbf{n}(\mathbf{x})$ 和 $n_i(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)^\alpha (i=1,2,3)$ 的(准)消失矩特性^[8]. 以 $\partial(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)^\alpha/\partial\mathbf{n}(\mathbf{x})$ 为例,由于

$$\frac{\partial(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)^\alpha}{\partial\mathbf{n}(\mathbf{x})}=\mathbf{n}(\mathbf{x})\cdot\nabla(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)^\alpha\tag{5}$$

所以在参考点 $\mathbf{x}_0$ 附近,边界法向量 $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ 可用多项式逼近

$$\mathbf{n}(\mathbf{x})=[P_1(\mathbf{x}),P_2(\mathbf{x}),P_3(\mathbf{x})]\tag{6}$$

式中: $P_i(\mathbf{x})$ 为多项式. 将式(6)代入式(5),由于

$$\nabla(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)^\alpha=\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)^{\alpha-1}$$

仍为多项式,可知 $\partial(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)^\alpha/\partial\mathbf{n}(\mathbf{x})$ 可以用关于 $(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)$ 的多项式的线性组合表示. 由于 T-小波关于 $(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)$ 的 p 阶多项式具有消失矩特性,它关于 $\partial(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)^\alpha/\partial\mathbf{n}(\mathbf{x})$ 的矩数值很小,即具有文献[8]提出的准消失矩特性,因此可用于矩阵压缩. 函数 $n_i(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)^\alpha (i=1,2,3)$ 的情况同理可得.

1.3 T-小波的构造及符号规定

下面简要叙述 T-小波的构造过程,并给出下文推导中用到的有关符号规定.

T-小波基 Ψ 的构造过程实质上是对结点基 $\mathbf{S}$ 作等价变换的过程. 为实现快速变换,首先需要建立单元树结构^[5]. 设树结构的层数为 L ,第 l 层上的非空格子集合为 C ,所有非空格子集合为 $C=\bigcup_{l=2}^L C_l$,格子 $\nu\in C$ 的中心坐标为 $\mathbf{c}_\nu$, ν 中包含的单元之并集为 Γ_ν , ν 的非空子格子的集合为 $\text{sons}(\nu)$. 其次,求每个格子 $\nu\in C$ 上关于 $(\mathbf{x}-\mathbf{c}_\nu)^\alpha$ 的矩量矩阵 $\mathbf{M}_\nu(\Phi_{\text{sons}(\nu)})$. 当 $\nu\in C_L$ 时, $\Phi_{\text{sons}(\nu)}$ 由 ν 中的边界元结点基函数组成;否则, $\Phi_{\text{sons}(\nu)}$ 由 ν 的子格子中的尺度函数组成. $\mathbf{M}_\nu(\Phi_{\text{sons}(\nu)})$ 的元素为 $\Phi_{\text{sons}(\nu)}$ 中任一函数 φ 关于 $(\mathbf{x}-\mathbf{c}_\nu)^\alpha$ 的矩,即

$$m_\nu^\alpha(\varphi)=\int_{\Gamma_\nu}(\mathbf{x}-\mathbf{c}_\nu)^\alpha\varphi(\mathbf{x})\mathrm{d}s_x\tag{7}$$

对 $\mathbf{M}_\nu(\Phi_{\text{sons}(\nu)})$ 作奇异值分解, $\mathbf{M}_\nu(\Phi_{\text{sons}(\nu)})=\mathbf{U}_\nu\boldsymbol{\Sigma}_\nu\mathbf{Q}_\nu^\mathrm{T}$,即可得到 ν 上的小波转换矩阵 $\mathbf{Q}_\nu$,于是 ν 上的尺度函数 $\Phi_\nu=\{\varphi_{\nu,i}\}$ 和小波 $\Psi_\nu=\{\psi_{\nu,i}\}$ 为

$$[\Phi_\nu,\Psi_\nu]=\Phi_{\text{sons}(\nu)}\mathbf{Q}_\nu=\Phi_{\text{sons}(\nu)}[\tilde{\mathbf{Q}}_\nu,\hat{\mathbf{Q}}_\nu]\tag{8}$$

式中: $\tilde{\mathbf{Q}}_\nu$ 和 $\hat{\mathbf{Q}}_\nu$ 分别为尺度函数和小波对应的转换矩阵.

2 矩阵压缩方法

本文采用 Galerkin 方法离散积分方程(1),形成非标准型系数矩阵^[3,5-6],记为 $\mathbf{A}_{\text{ns}}$. T-小波 BEM 的非标准型系数矩阵 $\mathbf{A}_{\text{ns}}$ 具有图 1 所示的典型结构,其中黑色块是稠密的,灰色块是数值稀疏的,空白处为 0,子块 $\mathbf{A}_l^{(f,g)}$ 中的元素为

$$[\mathbf{A}_l^{(f,g)}]_{ij}=\int_{\Gamma}\int_{\Gamma}\kappa(\mathbf{x},\mathbf{y})f_j(\mathbf{y})g_i(\mathbf{x})\mathrm{d}s_x\mathrm{d}s_y$$

由于小波的消失矩特性^[3,5],包含小波积分的所有子块都是数值稀疏的(灰色块),只有块 $\mathbf{A}_0^{(\varphi,\varphi)}$ 是稠密的(黑色块).

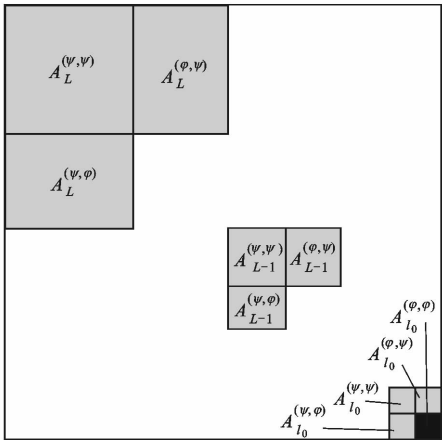


图 1 数值稀疏的非标准型矩阵结构

T-小波 BEM 中对矩阵 $\mathbf{A}_{\text{ns}}$ 的压缩分为前压缩和后压缩^[5,9]. 前压缩是在计算矩阵之前,先判断出矩阵 $\mathbf{A}_{\text{ns}}$ 中小值元素的位置,将其设为 0 而不予计算,从而将系数矩阵计算时间和内存消耗降到 $O(N)$. $\mathbf{A}_{\text{ns}}$ 经前压缩后仅含 $O(N)$ 个非零元素,记为 $\tilde{\mathbf{A}}_{\text{ns}}$. 但是, $\tilde{\mathbf{A}}_{\text{ns}}$ 中仍有大量小值元素,可以在计算出 $\tilde{\mathbf{A}}_{\text{ns}}$ 之后($\tilde{\mathbf{A}}_{\text{ns}}$ 的计算方法见第 3 节),舍去其中的小值元素,以进一步降低内存消耗,此过程称为后压缩,得到的矩阵记为 $\hat{\mathbf{A}}_{\text{ns}}$.

设 $[\hat{\mathbf{A}}_{\text{ns}}]_{ij}^l$ 为第 l 层、下标为 ij 的元素, ϵ_l 为该层的后压缩参数

$$\epsilon_l=C_\epsilon 2^{-l}\eta^{\rho_l}\tag{9}$$

则后压缩算法可表示为^[9]

$$[\hat{\mathbf{A}}_{\text{ns}}]_{ij}^l=\begin{cases} [\tilde{\mathbf{A}}_{\text{ns}}]_{ij}^l, & |[\tilde{\mathbf{A}}_{\text{ns}}]_{ij}^l|\geq\epsilon_l \\ 0, & |[\tilde{\mathbf{A}}_{\text{ns}}]_{ij}^l|<\epsilon_l \end{cases}\tag{10}$$

应注意,后压缩只有对 $\tilde{\mathbf{A}}_{\text{ns}}$ 中小值元素数目足够多的子块实行,才能降低内存消耗.这是因为原 $\tilde{\mathbf{A}}_{\text{ns}}$ 是分块以满阵的形式存储的,后压缩之后应以稀疏模式存储.以C语言编程为例,设double和int型数据的存储空间分别为 M_d 和 M_i ,满阵模式中 $\tilde{\mathbf{A}}_{\text{ns}}$ 的 $n \times m$ 维子块 $\mathbf{B}$ 的内存占用为

$$M_i(\mathbf{B}) = mnM_d$$

设 $\mathbf{B}$ 中符合压缩条件式(10)而保留的非零元素数目为 N_{nz} ,若采用稀疏模式,用一个长 N_{nz} 的double型数组存非零元素,另一个长 N_{nz} 的int数组存元素的位置,则需要的内存空间为

$$M_s(\mathbf{B}) = N_{\text{nz}}(M_d + M_i)$$

因此,为节省内存,即使 $M_s(\mathbf{B}) < M_i(\mathbf{B})$,仍需

$$\frac{N_{\text{nz}}}{mn} < \frac{M_d}{M_d + M_i} \quad (11)$$

可见,后压缩只有对满足式(11)的块实施,才可达节省内存的目的.数值算例显示,一般情况下经前压缩之后, $\tilde{\mathbf{A}}_{\text{ns}}$ 中仍存在大量满足式(11)的子块,因而后压缩算法仍能有效降低内存空间消耗.

3 矩阵快速计算

非标准型系数矩阵 $\tilde{\mathbf{A}}_{\text{ns}}$ 由邻近格子 ν 和 $\nu' \in N(\nu)$ 上的小波和尺度函数的积分

$$\begin{aligned} &\langle \Phi_\nu^T, K\Phi_{\nu'} \rangle; \langle \Phi_\nu^T, K\Psi_{\nu'} \rangle \\ &\langle \Psi_\nu^T, K\Phi_{\nu'} \rangle; \langle \Psi_\nu^T, K\Psi_{\nu'} \rangle \end{aligned}$$

组成,其中

$$\langle \Phi_\nu^T, K\Phi_{\nu'} \rangle = \int_{\Gamma_\nu} \Phi_\nu^T(\mathbf{x}) \int_{\Gamma_{\nu'}} \kappa(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Phi_{\nu'}(\mathbf{y}) d\mathbf{y} d\mathbf{x}$$

其余类似.由T-小波的构造过程可知,这些积分可由 ν 和 ν' 的子格子上的尺度函数的积分转化得到,即

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} \langle \Phi_\nu^T, K\Phi_{\nu'} \rangle & \langle \Phi_\nu^T, K\Psi_{\nu'} \rangle \\ \langle \Psi_\nu^T, K\Phi_{\nu'} \rangle & \langle \Psi_\nu^T, K\Psi_{\nu'} \rangle \end{bmatrix} = \\ &Q_\nu^T \langle \Phi_{\text{sons}(\nu)}^T, K\Phi_{\text{sons}(\nu')} \rangle Q_{\nu'} \quad (12) \end{aligned}$$

因此,问题归结为计算 $\langle \Phi_{\text{sons}(\nu)}^T, K\Phi_{\text{sons}(\nu')} \rangle$,其中同时包含邻近格子和相离格子上的尺度函数积分.邻近格子上的积分可由式(12)递归计算,下面给出相离格子上尺度函数积分的快速计算方法.

当格子 ν 和 ν' 相离时,任意点 $\mathbf{x} \in \Gamma_\nu$ 和 $\mathbf{y} \in \Gamma_{\nu'}$ 满足

$$|\mathbf{x} - \mathbf{c}_\nu| + |\mathbf{y} - \mathbf{c}_{\nu'}| < |\mathbf{c}_\nu - \mathbf{c}_{\nu'}|$$

因此,积分核函数 $\kappa(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 可用泰勒展开近似,即

$$\begin{aligned} &\kappa(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \approx \\ &\sum_{|\alpha|+|\beta| \leq \tilde{p}_l} \frac{\partial_x^\alpha \partial_y^\beta \kappa(r_{\nu, \nu'})}{\alpha! \beta!} (\mathbf{x} - \mathbf{c}_\nu)^\alpha (-1)^\beta \frac{\partial(\mathbf{y} - \mathbf{c}_{\nu'})^\beta}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{y})} \quad (13) \end{aligned}$$

式中: $r_{\nu, \nu'} = \mathbf{c}_\nu - \mathbf{c}_{\nu'}$; $\tilde{p}_l = \tilde{p}_L + L - l$, $\tilde{p}_L$ 的值通常可取1或2.于是, ν 和 ν' 上2个尺度函数 $\varphi_{\nu, i}$ 和 $\varphi_{\nu', i'}$ 的积分可近似为

$$\begin{aligned} &\langle \varphi_{\nu, i}, K\varphi_{\nu', i'} \rangle = \\ &\sum_{|\alpha|+|\beta| \leq \tilde{p}_l} \frac{\partial_x^\alpha \partial_y^\beta \kappa(r_{\nu, \nu'})}{\alpha! \beta!} m_\nu^\alpha(\varphi_{\nu, i}) (-1)^\beta \bar{m}_{\nu'}^\beta(\varphi_{\nu', i'}) \quad (14) \end{aligned}$$

式中: $m_\nu^\alpha(\varphi_{\nu, i})$ 由式(7)给出

$$\bar{m}_\nu^\alpha(\varphi) = \int_{\Gamma_\nu} \frac{\partial(\mathbf{x} - \mathbf{c}_\nu)^\alpha}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{x})} \varphi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (15)$$

关于多项式 $(\mathbf{x} - \mathbf{c}_\nu)^\alpha$ 的矩 m_ν^α 在小波构造过程中已经计算并存储,而关于 $\partial(\mathbf{x} - \mathbf{c}_\nu)^\alpha / \partial \mathbf{n}(\mathbf{x})$ 的矩 $\bar{m}_\nu^\alpha$ 是之前并未计算过的.当 ν 所在层数 $l < L$ 时,直接计算 $\bar{m}_\nu^\alpha$ 的计算量为 $O(N^2)$,下面推导快速计算方法.

设 $\bar{\mathbf{M}}_\nu(\Phi_\nu)$ 为 ν 上的尺度函数关于 $\partial(\mathbf{x} - \mathbf{c}_\nu)^\alpha / \partial \mathbf{n}(\mathbf{x})$ 的矩量矩阵,即

$$[\bar{\mathbf{M}}_\nu(\Phi_\nu)]_\alpha = \bar{m}_\nu^\alpha(\Phi_\nu)$$

由式(8)可知, $\Phi_\nu = \Phi_{\text{sons}(\nu)} \tilde{Q}_\nu$,代入上式得

$$[\bar{\mathbf{M}}_\nu(\Phi_\nu)]_\alpha = \int_{\Gamma_\nu} \frac{\partial(\mathbf{x} - \mathbf{c}_\nu)^\alpha}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{x})} \Phi_\nu(\mathbf{x}) d\mathbf{x} =$$

$$\left[\int_{\Gamma_\nu} \frac{\partial(\mathbf{x} - \mathbf{c}_\nu)^\alpha}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{x})} \Phi_{\text{sons}(\nu)}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right] \tilde{Q}_\nu =$$

$$\left[\int_{\Gamma_{\mu 1}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{x})} ((\mathbf{x} - \mathbf{c}_{\mu 1}) + (\mathbf{c}_{\mu 1} - \mathbf{c}_\nu))^\alpha \Phi_{\mu 1}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \dots, \right.$$

$$\left. \int_{\Gamma_{\mu l}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{x})} ((\mathbf{x} - \mathbf{c}_{\mu l}) + (\mathbf{c}_{\mu l} - \mathbf{c}_\nu))^\alpha \Phi_{\mu l}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right] \tilde{Q}_\nu =$$

$$\left[\sum_{\alpha \leq \beta} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} (\mathbf{c}_{\mu 1} - \mathbf{c}_\nu)^{\alpha - \beta} [\bar{\mathbf{M}}_{\mu 1}(\Phi_{\mu 1})]_\beta, \dots, \right.$$

$$\left. \sum_{\alpha \leq \beta} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} (\mathbf{c}_{\mu l} - \mathbf{c}_\nu)^{\alpha - \beta} [\bar{\mathbf{M}}_{\mu l}(\Phi_{\mu l})]_\beta \right] \tilde{Q}_\nu$$

因此

$$\bar{\mathbf{M}}_\nu(\Phi_\nu) =$$

$$[\mathbf{T}_{\nu, \mu 1} \bar{\mathbf{M}}_{\mu 1}(\Phi_{\mu 1}), \dots, \mathbf{T}_{\nu, \mu l} \bar{\mathbf{M}}_{\mu l}(\Phi_{\mu l})] \tilde{Q}_\nu \quad (16)$$

式中: $\mathbf{T}_{\nu, \mu}$ 为子代 μ 向 ν 的矩转换矩阵

$$[\mathbf{T}_{\nu, \mu}]_{\alpha, \beta} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} (\mathbf{c}_\mu - \mathbf{c}_\nu)^{\alpha - \beta}$$

不难发现,这里的 $\mathbf{T}_{\nu, \mu}$ 和快速多极方法中的M2L转换矩阵是相同的.

式(16)说明,格子 ν 上的矩 $\bar{m}_\nu^\alpha(\varphi_\nu)$ 可由其子格子上的尺度函数的矩转化得到.因此,只要计算出第 L 层上每个格子上的尺度函数关于 $\partial(\mathbf{x} - \mathbf{c}_\nu)^\alpha / \partial \mathbf{n}(\mathbf{x})$ 的矩,然后按照上述M2L转换方法,就可以计算出其余各层上任意格子上的矩,这个过程的计

算量为 $O(N)$.

对任意 L 层格子 $\nu \in C_L$

$$[\overline{\mathbf{M}}_\nu(\Phi_\nu)]_\alpha = \left[\int_{\Gamma_\nu} \frac{\partial(\mathbf{x}-\mathbf{c}_\nu)^\alpha}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{x})} \Xi_\nu(\mathbf{x}) \mathrm{d} s_x \right] \widehat{\mathbf{Q}}_\nu =$$
$$[\overline{m}_\nu^\alpha(\chi_{\nu,i}) : i \in \Pi_\nu] \widehat{\mathbf{Q}}_\nu$$

即

$$\overline{\mathbf{M}}_\nu(\Phi_\nu) = \overline{\mathbf{M}}_\nu(\Xi_\nu) \widehat{\mathbf{Q}}_\nu, \quad \nu \in C_L \tag{17}$$

式中: Π_ν 为格子 ν 中边界元结点基函数的序号集; $\Xi_\nu(\mathbf{x})=[\chi_{\nu,i} : i \in \Pi_\nu]$ 为 ν 中结点基函数组成的行向量. 由

$$\frac{\partial(\mathbf{x}-\mathbf{c}_\nu)^\alpha}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{x})} = \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}-\mathbf{c}_\nu)^{\alpha-1} \mathbf{n}(\mathbf{x})$$

可得 $\overline{m}_\nu^\alpha(\chi_{\nu,i})$ 的计算式

$$\overline{m}_\nu^\alpha(\chi_{\nu,i}) = \boldsymbol{\alpha} m_\nu^{\alpha-1}(\chi_{\nu,i}) \mathbf{n}(\mathbf{x}) \tag{18}$$

即 ν 中结点基函数关于 $\partial(\mathbf{x}-\mathbf{c}_\nu)^\alpha/\partial \mathbf{n}(\mathbf{x})$ 的矩可以由它关于 $(\mathbf{x}-\mathbf{c}_\nu)^\alpha$ 的矩转化得到.

总结起来,在采用 Galerkin 离散方法的 T-小波 BEM 中,非标准型系数矩阵的快速计算过程为:

- (1)对第 L 层上的任意格子 $\nu \in C_L$,按式(18)求出 $\overline{\mathbf{M}}_\nu(\Xi_\nu)$,并按式(17)计算 ν 上尺度函数的矩 $\overline{\mathbf{M}}_\nu(\Phi_\nu)$;
- (2)当 $l=L-1, \cdots, 2$ 时,按式(16)计算格子 $\nu \in C_l$ 上的矩 $\overline{\mathbf{M}}_\nu(\Phi_\nu)$;
- (3)当 $l=L, \cdots, 2$ 时,按式(12)计算系数矩阵元素,其中相离格子上的积分按式(14)计算.

4 算 例

用 2 个算例验证本文提出的采用 Galerkin 离散方法的 T-小波 BEM 的正确性,及其对大规模工程问题的求解效率. 计算程序在文献[5,8-9]的基础上引入本文的系数矩阵计算方法,矩阵压缩方法请参阅这些文献. 程序运行环境为: HP8600 工作站, 单个 CPU,主频 3.0 GHz,内存 32 GB. 线性方程组用 GMRES 迭代方法求解.

考虑静电学中的电容计算问题,其工程应用涉及空间飞行器的电离充电、飞机静电充电、微机电系统的设计与分析等. 此问题可由第二类边界积分方程^[4]

$$(1/2 + K' + AG')\sigma = Ap \tag{19}$$

求解. 式中: K' 为式(1)中双层势算子 K 的对偶算子

$$K'u(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{x})} \frac{1}{4\pi |\mathbf{x}-\mathbf{y}|} u(\mathbf{y}) \mathrm{d} s_y$$

显然,本文对 K 的 T-小波压缩方法对 K' 同样适用. 算子 A 和 G' 的定义及其离散方法可参见文献[4]. 当导体上的电压 $p=1$ V 时,由方程(19)解得电荷密度 σ , 则电容 $C = \int_{\Gamma} \sigma \mathrm{d} s$.

4.1 导体球模型

为验证方法的正确性,求解半径为 1 m 的导体球的电容. 已知其理论值为 $4\pi\epsilon_0$, 其中 ϵ_0 为真空电容率,这里设为 1×10^{-12} . 球表面划分的单元数 N 从 3 940 到 257 696. 计算中取近场格子距离比 $\eta=0.4$,最底层上消失矩阶数 $p_L=1$,压缩参数 $C_\sigma=C_\epsilon=1.0$,参数的定义可参见文献[9]. GMRES 求解器的收敛误差限为 10^{-9} .

分别用本文方法和文献[9]中的方法(简称原方法)求解上述问题. 本文方法仅需构造 1 组 T-小波,而原方法要构造 2 组. 表 1 列出了 2 种方法用于 T-小波构造的计算时间和内存消耗,以及所计算的电容值. 可以看出:①本文方法将 T-小波构造的计算时间和内存消耗降低了大约一半;②2 种方法的计算结果基本相同.

表 1 中还给出了本文方法中系数矩阵的内存占用量(矩阵内存). 可见,原方法用于小波构造的内存占用量远大于系数矩阵的内存占用量,而在本文方法中 2 种内存消耗相差不大,因此本文方法可以显著降低 T-小波 BEM 的总内存占用量(约降低 35%).

表 1 导体球模型的计算结果

N	占用内存/MB			计算时间/s		电容 ¹⁾ /pF	
	原方法	本文方法	矩阵内存	原方法	本文方法	原方法	本文方法
3 940	3.67	1.94	2.66	0.08	0.05	12.423 2	12.422 8
13 564	13.36	7.37	8.31	0.27	0.13	12.232 2	12.232 5
39 812	40.33	23.10	24.04	0.82	0.43	12.339 1	12.339 0
80 352	73.58	34.77	33.41	1.49	0.70	12.412 2	12.411 9
144 384	163.62	77.79	81.92	2.06	1.09	12.490 5	12.490 4
257 696	251.97	131.58	116.87	5.28	2.55	12.543 0	12.543 1

1):实际电容值为 12.566 4 pF.

4.2 飞机模型

飞机电容的计算是对其进行充、放电分析的首要步骤. 将本文方法应用于某飞机的电容计算中, 以考察其在求解工程大规模问题中的高效性. 计算模型如图2所示. 模型表面划分为1 232 528个三角形单元, 图2中仅显示了尾部的单元划分情况. 本例的GMRES误差限取 10^{-4} , 其余计算参数和上一算例相同.

本文方法的总求解时间为1 386 s, 内存占用量为823 MB, 计算电容值为610. 871 pF, 而原方法的求解时间为1 399 s, 内存占用量为1 170 MB, 计算电容值为610. 832 pF. 显然, 本文方法由于只构造1组T-小波, 有效降低了T-小波BEM的内存消耗. 由于小波构造时间与矩阵计算时间相比其值很小, 因此本文方法对总计算时间的影响不大.

此算例的结果表明, 本文方法可以在普通计算机上用不到半小时的时间完成自由度为上百万的边界元静电场分析, 其求解效率高于目前应用最为广泛的快速多极边界元法^[1].

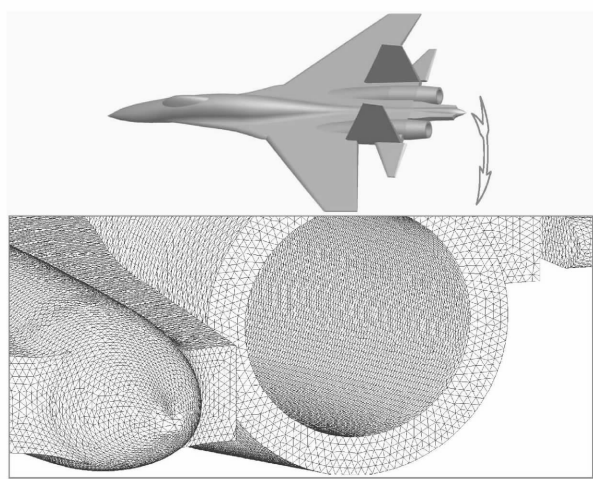


图2 飞机模型的表面网格划分(局部)

5 结论

T-小波边界元法是目前最为高效的快速边界元法之一. 然而, 现有T-小波边界元法中均采用Petrov-Galerkin方法离散边界积分方程, 需要构造多组T-小波基, 用于小波构造的内存消耗甚至远大于系数矩阵存储的内存占用量.

本文提出采用Galerkin离散方法的T-小波边界元法, 只需要构造1组T-小波基, 可以有效降低方法的总内存消耗. 此外, 本文还提出了系数矩阵的快速计算方法. 将本文方法用于求解电容提取问题中的第二类边界积分方程, 计算结果表明, 可使用于小波构造的计算时间和内存消耗减少一半, 同时保持原方法的精度不变.

参考文献:

- [1] WANG Haitao, LEI Ting, LI Jin, et al. A parallel fast multipole accelerated integral equation scheme for 3D Stokes equations [J]. Int J Numer Meth Engng, 2007, 70(7): 812-839.
- [2] DAHMEN W, HARBRECHT H, SCHNEIDER R. Compression techniques for boundary integral equations optimal complexity estimates [J]. SIAM J Numer Anal, 2006, 43(6): 2251-2271.
- [3] BEYLKIN G, COIFMAN R, ROKHLIN V. Fast wavelet transforms and numerical algorithms [J]. Comm Pure Appl Math, 1991, 44(2): 141-183.
- [4] TAUSCH J, WHITE J. Second-kind integral formulations of the capacitance problem [J]. Advances in Computational Mathematics, 1998, 9(1/2): 217-232.
- [5] TAUSCH J. A variable order wavelet method for the sparse representation of layer potentials in the non-standard form [J]. J Numer Math, 2004, 12(3): 233-254.
- [6] TAUSCH J, WHITE J. Multiscale bases for the sparse representation of boundary integral operators on complex geometry [J]. SIAM J Sci Comput, 2003, 24(5): 1610-1629.
- [7] TAUSCH J. Sparse BEM for potential theory and Stokes flow using variable order wavelets [J]. Computational Mechanics, 2003, 32(4/6): 312-319.
- [8] XIAO Jinyou, TAUSCH J, WEN Lihua. Approximate moment matrix decomposition in wavelet Galerkin BEM [J]. Comput Methods Appl Mech Engng, 2008, 197(45/48): 4000-4006.
- [9] XIAO Jinyou, TAUSCH J, HU Yucai. A-posteriori compression of wavelet-BEM matrices [J]. Computational Mechanics, 2009, 44(5): 705-715.

(编辑 葛赵青)